**Алгоритм итеративного уточнения для SVD, основанный на матричном умножении**

В данной работе рассматривается алгоритм, предложенный Огита Т. и Аишима К., итеративного уточнения для сингулярных значений полного сингулярного разложения [1].

Описание алгоритма

Данный алгоритм выполняет SVD разложение для матрицы , где . В случае рассматривается . Разложение имеет вид: , где и – ортогональные матрицы, а – диагональная матрица с элементами на диагонали , , такими что , – сингулярные числа матрицы, а столбцы матриц и – левые и правые сингулярные векторы соответственно.

Идея алгоритма строится на использовании известных равенств и свойств матриц (ортогональность и и диагонализируемость ):

где и – единичные матрицы размеров и соответственно.

Пусть матрица и – приближение матриц и , такое, что и , а и – корректирующие матрицы. Тогда свойство ортогональности (1) и (2) можно записать как:

откуда следует, что

Определимкак , где , . Под нормой матрицы в данном случае подразумевается спектральная норма матрицы, т.е. норма, которая соответствует наибольшему сингулярному значению матрицы.

Предположим, что . Тогда для и для справедливо (это следует из разложения в ряд Тейлора [2]):

Подставляя данные уравнения в формулы (4) и (5), получим:

Также, подставляя и в (3), получим:

Здесь

где

Пренебрегая членами второго порядка , и , можно составить систему матричных уравнений из (6), (7) и (8), где ), , :

Для нахождения искомого разложения осталось лишь решить систему (9) для , и . Для более оптимального счета, разобьем матрицы , , и следующим образом:

Тогда

и

Рассмотрим сначала диагональные элементы и . Их можно найти из первого и второго уравнений системы (9):

Далее, рассмотрим третье уравнение из системы (9). Из него следует, что:

Тогда, если (возможно, что , однако обычно на практике значения и сильно меньше 1 [1]) мы имеем:

Далее найдем недиагональные элементы и . Из (9) и (10) можно получить линейную систему :

для . Умножение (13) и (14) на и соответственно нам даст следующий результат:

сложим эти два равенства

Подставим в полученное выражение (12):

Соединим полученное выражение с (11):

Аналогично, используя (11)-(14) мы получаем:

Отсюда выражаем и :

при.Используя (10), можно выразить :

С помощью этого равенства можно получить значения :

И наконец, можно выразить :

Из полученных равенств можно составить алгоритм, представленный в листинге 1. Это и есть алгоритм итеративного уточнения для SVD, основанный на матричном умножении.

При реализации данного алгоритма нужно учитывать, что он рассчитан на поиск разложения только в том случае, если собственные значения матрицы не совпадают друг с другом, т.е. . В случае, если это не так, нужно обработать исключение, например, как в [3]. Также необходимо отметить, что для работы данного алгоритма необходима высокая арифметическая точность вычислений.

|  |
| --- |
| **Входные данные:** , где , ,  **Выходные данные:** , ,   1. Поиск : ; ; 2. Расчет приближенных собственных значений: для 3. Расчет диагональных элементов и : ; для 4. Расчет недиагональных элементов и : {; ; ;} для 5. Расчет : для 6. Расчет : для , 7. Расчет : для 8. Нахождение новых значений для и ; |

Листинг 1. Алгоритм уточнения для SVD, основанный на матричном умножении.

Алгоритм имеет квадратичную сходимость. Доказательство данного факта представлено в [1].

Тестирование алгоритма

Для анализа работы реализованного алгоритма было проведено тестирование. Для тестирования было сгенерировано точное сингулярное разложение для матрицы размеров , , , , со случайными сингулярными значениями из интервала или . Далее к этому разложению был добавлен шум: отклонение от начального значения на , , , . Далее к полученной матрице из зашумленных данных применялся алгоритм. Для каждого из экспериментов выводятся данные: размер матрицы ; интервал значений сингулярных чисел; добавляемая ошибка; число итераций, а также, как результат теста, выводятся норма разницы исходной и восстановленной матриц в пространствах и , то есть нормы и соответственно; нормы разниц изначальных и уточненных матриц ; время на выполнение алгоритма. Результаты тестирования представлены в svd\_results.csv.

Список литературы

1. Ogita T., Aishima K. Iterative refinement for singular value decomposition based on matrix multiplication // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112512>.
2. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1 / В. А. Зорич. — 6-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2012. — 564 с.
3. Ogita T., Aishima K. Iterative refinement for symmetric eigenvalue decomposition // Japan J. Indust. Appl. Math. — 2018. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s13160-018-0310-3>.